

Logarithme Vulgarisation

Jonathan Desurmont

July 23, 2022

Littéralement, la fonction logarithme est le nombre de puissances que contient un nombre calculé en fonction d'un autre nombre appelé base.

Prenons le nombre de ports que l'on peut ouvrir sur un ordinateur : 65536

Par un rapide calcul mental :

$$65536 = \prod_{i=1}^4 16 = 16^4 = 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \quad (1)$$

$$16^4 = \prod_{i=1}^8 4 = 4^8 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \quad (2)$$

$$4^8 = \prod_{i=1}^{16} 2 = 2^{16} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad (3)$$

$$\log_{16}(65536) = 4 \quad (4)$$

$$\log_4(65536) = 8 \quad (5)$$

$$\log_2(65536) = 16 \quad (6)$$

En effet 65536 est divisible par 4 car ses deux derniers chiffres forment 36 qui se décompose en 9 fois 4. Si il est divisible par 4 il est donc divisible par 2, on aurait pu s'en douter le nombre de ports d'un ordinateur étant codé en binaire ! Ainsi on calcule facilement le logarithme.

Réalisons maintenant à partir de ces résultats une simple équation logarithmique :

$$\log_2(65536) = 2 \cdot \log_4(65536) = 4 \cdot \log_{16}(65536) \quad (7)$$

Voici des équations en passant par trois bases différentes de la base 2 à la base 4 à la base 16.

On change facilement de base dans cet exemple car on passe d'un carré à un carré, le résultat d'un logarithme étant basé sur une fonction puissance ce serait plus difficile de faire une équation en changeant la base vers une base multiple comme 32.

Entrainons nous : Alors quel est le prochain carré ? Et quelle équation allons nous devoir réaliser ?

$$65536 = 256^2 = \prod_2^2 256 = 256 \cdot 256 \quad (8)$$

soit

$$8 \cdot \log_{256}(65536) \quad (9)$$

Par contre diviser 65536 par 10 ne donnerait pas un entier naturel mais un nombre avec une partie décimale ou à virgule flottante.

Le résultat du logarithme de base 10 est donc un nombre de puissance avec une partie décimale :

$$\log_{10}(65536) = 4,816479931 \quad (10)$$

Même si il y'a trois bases remarquables (les plus fonctionnelles) qui sont la base de 10, la base de 2 et la base naturelle qui utilise le nombre exponentiel il y'a en réalité autant de bases que l'on veut.

$$\log_{10}(255) = \log_{10}(17) + \log_{10}(5) + \log_{10}(3) = 2,40654018 \quad (11)$$

Si on multiplie les logarithmes de base 10 des nombres additionnées entre eux on obtient $17 \times 5 \times 3 = 255$ qui est le nombre que l'on souhaitait calculer sur la base de 10.

Pourquoi c'est utile en informatique ?

$$\log_2(65536) = 16 = 10000000000000000 \quad (12)$$

Sur un encodage positionnel, en binaire, (sur une base 2) le résultat du logarithme donne le nombre de 0 soit 16 avant le premier bit encodé donc sur le 3ème octet

$$\log_{16}(65536) = 4 = 10000 \quad (13)$$

En hexadécimal (sur une base 16) le résultat du logarithme donne le nombre de 0 soit 4 avant le premier bit encodé également sur le 3ème octet. En hexadécimal car $16/8 = 2$ donc un octet est encodé sur 2 valeurs.